Erzwungene Schwingungen und Resonanzphänomene

oder…

… warum Männer am liebsten in der Badewanne und Frauen lieber auf der Toilette singen.

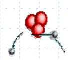
Dr. Christian Schröder

Agenda

- Schwingungen: Freund oder Feind?
- Warum sollte man sich mit Schwingungen beschäftigen?
- Ideale und reale Schwingungen
- Erzwungene Schwingungen und Resonanz
- Spezielle Schwingungsprobleme
- Zusammenfassung
- Literatur

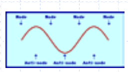
Schwingungen: Freund oder Feind?

- Schwingungen sind ein allgegenwärtiges *natürliches* Phänomen
  - Atome, Moleküle, Festkörper, ...



- Schwingungen sind ein allgegenwärtiges *persönliches* Phänomen
  - Im menschlichen Körper: Herzschlag, Atmung, Hören, Sprechen, Schnarchen ...

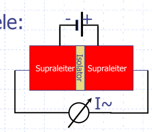
- Schwingungen sind ein allgegenwärtiges *technisches* Phänomen
  - Musik, Uhren, Radarfallen, Ultraschall, Kernspintomograph, Seismograph, Messgeräte, ...



Warum sollte man sich mit Schwingungen beschäftigen?

Nicht nur die Bewegung selbst interessiert, sondern besonders deren Ursache!

- Einfache (besser: *vereinfachte*) Beispiele:
  - Faden- oder Federpendel
- Weniger einfache Beispiele:
  - Fahrgeräusche beim Automobil
- Schwieriges Beispiel:
  - Josephson-Effekte in der Mikroelektronik, deren Ursache nur noch quantenmechanisch erklärbar ist.



Warum sollte man sich mit Schwingungen beschäftigen?

Schwingungen sind Alltag im Ingenieursgeschäft:

- Nützliche Schwingungen:
  - Wie öffnet man eine Weinflasche?
  - Schwingsiebe, Sortier- und Fördermaschinen
  - (Optische) Nachrichten- und Messtechnik „leben" von Schwingungen!
- Störende, häufig zerstörerische Schwingungen:
  - Empfindliche Elektronik in Flugzeugen oder Raketen
  - Schraubenmuttern auf pulsierend belastetem Gewindebolzen
  - Verschleiß bei Zahnradgetrieben
  - Erdbeben

Warum sind manche Schwingungen nützlich, andere dagegen störend???

Ideale Schwingungen

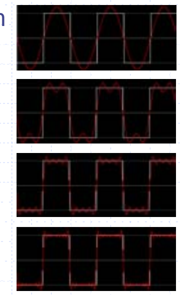
- Eigenschaften idealer *harmonischer* Schwingungen
  - Rückstellkraft ist **proportional** zur Auslenkung des schwingenden Körpers.
  - Die Energie bleibt hierbei erhalten und **pendelt** nur zwischen **kinetischer** und **potentieller** Form hin und her.
  - Sich selbst überlassen schwingt das System mit seiner **Eigenfrequenz** ω_e
  - Harmonische Schwingung = sinusförmige Schwingung!
- Beispiel: Federpendel: $x(t) = x_{t=0} \cdot \cos \omega_e t$

„Visitenkarte" eines schwingfähigen Systems $\omega_e = \sqrt{\frac{D}{m}}$ **MERKEN!**

Wie bestimmt man Eigenfrequenzen???

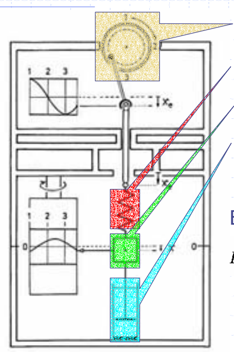
Reale Schwingungen

- **Ideale und reale Schwingungen**
  - **Reale, komplizierte Schwingungsformen** können aus harmonischen Schwingungen zusammengesetzt werden!
  - **Harmonische Analyse:** Die Aufgabe zu einer gegebenen sich regelmäßig wiederholenden (Mess-) Kurve die harmonischen Komponenten zu bestimmen.



- ***Fazit: Man muss im wesentlichen die harmonischen Schwingungen verstehen!***

Erzwungene Schwingung



Äußere Kraft: $F_{Erreger} = F_0 \cdot \cos \omega t$

Rückstellkraft: $F_D = D \cdot x$

Trägheitskraft: $F_a = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$

Reibungskraft: $F_R = k \cdot v = k \cdot \frac{dx}{dt}$

Bewegungsgleichung:

$$F_0 \cdot \cos \omega t = D \cdot x + m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot \frac{dx}{dt}$$

Müssen wir diese Gleichung jetzt etwa exakt lösen??

Erzwungene Schwingung – Physikalische Diskussion

$$F_0 \cdot \cos \omega t = D \cdot x + m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot \frac{dx}{dt}$$

- Annahme: x(t) schwingt nach kurzer Zeit mit der Frequenz des Erregers, allerdings mit einer Phasenverschiebung α („Reaktionszeit") gegenüber der äußeren Kraft F_0:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t - \alpha)$$

Achtung Überschlagsrechungen!

- Die zeitlichen Ableitungen sind:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin(\omega t - \alpha) \quad \text{(Geschwindigkeit)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t - \alpha) \quad \text{(Beschleunigung)}$$

Erzwungene Schwingung – Physikalische Diskussion

$$\begin{aligned} F_0 \cdot \cos \omega t = \; & D \cdot x_0 \cos(\omega t - \alpha) \\ & - m\omega^2 \cdot x_0 \cos(\omega t - \alpha) \\ & - k\omega \cdot x_0 \sin(\omega t - \alpha) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F_0 \cdot \cos \omega t = \; & D \cdot x \\ & + m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \\ & + k \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Sin- und cos-Funktionen haben Größenordnung 1!

⇒ Die Glieder der rechten Seite (D, $m\,\omega^2$ und $k\,\omega$) müssen alle ***zusammen*** die Kraft F_0 ausgleichen!

1. Für sehr kleine ω überwiegt das Glied D:

$$\begin{aligned} F_0 \cdot \cos \omega t &= D \cdot x_0 \cos(\omega t - \alpha) \\ \Rightarrow \alpha &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F_0 \cdot \cos \omega t &= D \cdot x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{F_0}{D} \cos \omega t \end{aligned}$$

Die Phasendifferenz zwischen x und F_0 ist $\alpha = 0$!

Erzwungene Schwingung – Physikalische Diskussion

$$\begin{aligned} F_0 \cdot \cos \omega t = \; & D \cdot x_0 \cos(\omega t - \alpha) \\ & - m\omega^2 \cdot x_0 \cos(\omega t - \alpha) \\ & - k\omega \cdot x_0 \sin(\omega t - \alpha) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F_0 \cdot \cos \omega t = \; & D \cdot x \\ & + m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \\ & + k \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

2. Für sehr große ω überwiegt das Trägheitsglied $m\omega^2$:

$$\begin{aligned} F_0 \cdot \cos \omega t &= -m\omega^2 x_0 \cos(\omega t - \alpha) \\ \Rightarrow \alpha &= \pi \quad \text{(Minuszeichen!)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F_0 \cdot \cos \omega t &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ x &= -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t \end{aligned}$$

Die Phasendifferenz zwischen x und F_0 ist $\alpha = \pi$!

Erzwungene Schwingung – Physikalische Diskussion

Leistungsaufnahme des Schwingers:

⇒ Nur, wenn der Körper in Richtung der Kraft schwingt! (Schaukel!)

$$P = F \cdot \frac{dx}{dt}$$

1. ω sehr klein, $\alpha = 0$:

$P \propto \cos\omega t \cdot \sin\omega t$

2. ω sehr groß, $\alpha = \pi$:

$P \propto \cos\omega t \cdot \sin\omega t$

*Über eine **volle Periode** heben sich Leistungsaufnahme (P positiv) und Leistungsabgabe (P negativ) auf.*
***Die Gesamtleistungsaufnahme ist also Null**!*

Frage: Was geschieht, wenn mit wachsendem ω die Phasenverschiebung von 0 nach π wechselt?

Erzwungene Schwingung – Physikalische Diskussion

3. $\alpha = \pi/2$:

$$F_{Erreger} = F_0 \cdot \cos\omega t$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin(\omega t - \alpha) = \omega x_0 \cdot \cos\omega t \quad \text{(Geschwindigkeit)}$$

Die Geschwindigkeit ist ***immer in Phase*** mit der Kraft!
⇒ Das System nimmt ***ständig*** Leistung auf:

$$P = F_0 \omega x_0 \cos^2\omega t$$

Diese Leistung wird von der Reibungskraft verbraucht:

$$P_{diss} = k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k\omega^2 x_0^2 \cos^2\omega t$$

Gleichgewicht herrscht, wenn Gewinn und Verlust im Mittel gleich sind, d.h.

$$P = P_{diss} \Rightarrow x_0 = \frac{F_0}{k\omega}$$

Erzwungene Schwingung – Physikalische Diskussion

Einsetzen von $x_0 = \frac{F_0}{k\omega}$ in die Bewegungsgleichung:

$$\begin{array}{rlll} F_0 \cdot \cos\omega t = & D & \cdot x_0 \cos(\omega t - \alpha) & \cos\omega t = \frac{D}{k\omega} \cdot \sin\omega t \\ - & m\omega^2 & \cdot x_0 \cos(\omega t - \alpha) & - \frac{m\omega}{k} \cdot \sin\omega t \\ - & k\omega & \cdot x_0 \sin(\omega t - \alpha) & + \cos\omega t \end{array}$$

Die äußere Kraft wird durch das Reibungsglied kompensiert!

Trägheits- und Rückstellglied müssen sich wegheben. Das ist nur möglich, wenn:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \omega_e$$

Erregerfrequenz = Eigenfrequenz des ungedämpften Systems!

Der Erreger ist in „Resonanz" mit dem System!

Resonanz

- Im Resonanzfall nimmt das System ständig Energie auf, die einzig durch die Reibung verbraucht werden kann. Was passiert nun, wenn die Reibung k verschwindet?

$$P_{diss}(\omega) = \frac{1}{2}k^2\omega^2 \cdot x_0^2(\omega)$$

$$x_0(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + k^2\omega^2}}$$

(exakte Lösungen!)

- Offensichtlich verschwindet damit auch die mittlere verbrauchte Energie P_{diss}, was zur Folge hat, dass die Auslenkung x_0 ***bis ins Unendliche anwächst und damit zur Zerstörung des Systems*** führt.
- Man bezeichnet dieses Verhalten als **Resonanzkatastrophe.**

Resonanzkatastrophen – Historische Beispiele

- 1831 bringt ein Trupp von 60 im Gleichschritt marschierender Soldaten die Broughton-Hängebrücke über dem Irwell-Fluß in Manchester zum Einsturz.
- 1850 brachten etwa 500 Mann eines französischen Bataillons eine Hängebrücke zum Einsturz, wobei 226 Soldaten den Tod fanden.
- 1940 brach die Hängebrücke über die Tacoma-Schlucht im Staate Washington, USA durch resonante Energiezufuhr als Folge eines gleichmäßig wehenden Windes zusammen.
  - Strömungs-selbsterregte Schwingung

Wie verhindert man Resonanzkatastrophen?

- Zusätzliche Dämpfung
- Verschiebung der Resonanzfrequenzen
  - Konstruktionsänderungen

Erzwungene Schwingungen und Resonanz in der Technik

- Dynamik elektrischer Schaltvorgänge
  - Elektrischer Schwingkreis (Pendant zur Federschwingung!)
- Messtechnik
  - Messzeiten für kleine Ströme (el. Schwingkreis)
- Akustik
  - Lautsprecher (Membranschwingungen)
- Stanzen und Drehbänke
  - Werkzeug- und Werkstückschwingungen
- Radiowellenempfänger
  - Empfangsempfindlichkeit
- ...

Zusammenfassung – Erzwungene Schwingungen

- **„Visitenkarte" schwingungsfähiger** Systeme:
  - **Trägheit** (dient zur Speicherung kinetischer Energie)
  - **Steifigkeit** (dient zur Speicherung potentieller Energie)
  - **Dämpfung** (dient als Energieverbraucher)
  - **Eigenfrequenz(en)**
- Wenn eine **sinusförmig** mit irgendeiner Frequenz ω **pulsierende Kraft** auf ein schwingungsfähiges System einwirkt, dann **schwingt auch das System sinusförmig** mit eben dieser Frequenz ω.
- Die **Gleichheit der Frequenzen** ist charakteristisch für erzwungene Schwingungen.

Zusammenfassung – Resonanz

- Als **Resonanz** bezeichnet man die Effekte, die auftreten sobald man ein System periodisch mit einer seiner **Eigenfrequenzen** anregt.
- Im Resonanzfall **nimmt das System ständig Energie auf**, die einzig durch die Reibung im System verbraucht werden kann.
- Ist der Energieverbrauch durch Reibung zu klein, schwingt die zugeführte Energie in zunehmenden Maße zwischen potentiellem und kinetischem Reservoir hin und her. Die entstehenden Kräfte zerstören schließlich das System – es kommt zur **Resonanzkatastrophe**.

Spezielle Schwingungsprobleme

- Es heißt, Männer singen am liebsten in der Badewanne, Frauen auf der Toilette. Kann das einen physikalischen Grund haben?

  Die Frequenzbereiche von Bass, Tenor, Alt, Sopran sind ca. 66-350, 100-520, 130-700, 200-1050Hz.

  Das entspricht Grundschwingungen einer beiderseits eingespannten Luftsäule von 2.5-0.5, 1.7-0.3, 1.3-0.24, 0.8-0.16m Länge.

  Räume mit entsprechenden Abmessungen werden vom Sänger in maximale Resonanz versetzt, was gesangstechnisch nicht immer wünschenswert ist, aber den Stimmklang angenehm verstärkt!

Literatur

- C. Gerthsen, H. O. Kneser, H. Vogel: *Physik – Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen*, Springer Verlag, 2001
- R. E. D. Bishop: *Schwingungen in Natur und Technik*, Teubner Verlag Stuttgart, 1985
- J. Orear: *Physik*, Carl Hanser Verlag München Wien, 1987

Kontakt

christian.schroeder@telelogic.de

Anhang

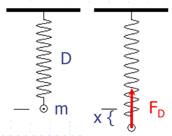
Freie, ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen

Freie, ungedämpfte Federschwingung

Dehnt man eine (ideale) Feder aus, so spürt man eine Kraft F_D, die proportional und entgegengesetzt zur Längenänderung x wirkt:

$$F_D = -D \cdot x \text{ (Hookesches Gesetz)} \qquad (1)$$

Hierbei ist D die Steifigkeit der Feder. Befestigt man an der gedehnten Feder eine Masse m und lässt diese dann los, so beschleunigt die Masse gemäß *Newtons Kraftgesetz*:



$$F_a = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot \ddot{x} \qquad (2)$$

Somit ergibt sich folgende Bewegungsgleichung

$$m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x \qquad (3)$$

Trägheitskraft = Rückstellkraft

Wie erhält man die Bewegungsgleichung?

⇒ auf **keinem Fall** über die *statische* Ansicht, d.h. die Kräftebilanz im Ruhezustand!

Warum nicht?

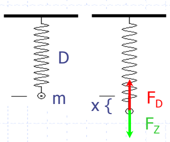
⇒ in einer Bewegungsgleichung beschreibt man die *zeitliche Änderung* der Auslenkung. Nur in diesem Fall gelten für Trägheits- und Reibungskraft:

$$F_a = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \neq 0$$

$$F_R = k \cdot v = k \cdot \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Wie erhält man die Bewegungsgleichung?

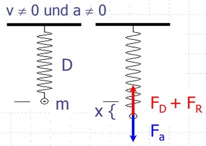
Statische Situation:
Pendelmasse *befindet sich in Ruhe* an der Stelle x. Das heißt:
v = 0 und a = 0



Kräftebilanz ergibt Statikgleichung!

$$F_Z = -F_D = -D \cdot x$$

Dynamische Situation:
Pendelmasse *schwingt nach unten* und ist *momentan* an der Stelle x.
Das heißt:
v ≠ 0 und a ≠ 0



Kräftebilanz ergibt Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} F_a &= -(F_D + F_R) \\ \Leftrightarrow m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} &= -D \cdot x - k \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Freie, ungedämpfte Federschwingung

Mit der Abkürzung $\omega = \sqrt{D/m}$ ergibt sich folgende *Differentialgleichung*:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \qquad (4)$$

Ein häufig angewandtes Verfahren bei der Lösung von Differentialgleichungen besteht darin, eine Lösung zu „raten" und dann zu prüfen, ob sie wirklich die Differentialgleichung erfüllt. Als „Lösungsversuch" nehmen wir:

$$x = x_0 \cos \omega t \qquad (5)$$

wobei x_0 die Auslenkung der Feder zum Zeitpunkt t = 0 ist. Dann ist:

$$\dot{x} = -x_0 \omega \sin \omega t \quad \text{(Geschwindigkeit)} \qquad (6)$$

Und:

$$\ddot{x} = -x_0 \omega^2 \cos \omega t \quad \text{(Beschleunigung)} \qquad (7)$$

Freie, ungedämpfte Federschwingung

Ergebnis:
Ein ideales Federpendel führt eine *harmonische* Schwingung aus. Die zeitliche Entwicklung der Auslenkung x(t) wird durch

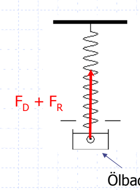
$$x(t) = x_{t=0} \cdot \cos \omega t \qquad (5)$$

beschrieben. Die Energie bleibt hierbei erhalten und pendelt nur zwischen kinetischer und potentieller Form hin und her.

In Wirklichkeit hat man es immer mit energieverzehrenden Reibungskräften zu tun und das System „verliert" im Laufe der Zeit Energie.
Man spricht von freien, gedämpften Schwingungen.

Freie, gedämpfte Federschwingung

- Das schwingende System verliert Energie
  ⇒ Die Amplitude der Schwingung wird allmählich kleiner
- Ursache hierfür sind Reibungskräfte F_R
- Nimmt man an, dass F_R proportional der Geschwindigkeit ist (z.B. Stokes Reibung) , so gilt:



$$F = m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x - k \cdot \dot{x} \qquad (8)$$

wobei k die Reibungskonstante sei.

- Die Lösungen der entsprechenden Differentialgleichung

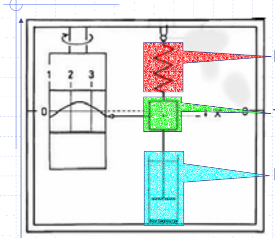
$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + D \cdot x = 0 \qquad (8)$$

lassen sich durch den Ansatz:

$$x = x_0 \cdot e^{\lambda t} \qquad (8)$$

errechnen:

Freie, gedämpfte Schwingung



Rückstellkraft: $F_D = D \cdot x$

Trägheitskraft: $F_a = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$

Reibungskraft: $F_R = k \cdot v = k \cdot \frac{dx}{dt}$

Bewegungsgleichung: $D \cdot x + m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot \frac{dx}{dt} = 0$

Freie, gedämpfte Schwingung

Umgeformt ergibt sich somit:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot \frac{dx}{dt} + D \cdot x = 0$$

Für diese Differentialgleichung müssen 3 Fälle unterschieden werden. Abgesehen von den 2 „pathologischen" Fällen in denen das System nicht sinusförmig schwingt, sondern in die Ruhelage „kriecht", gibt es eine „schwingende" Lösung:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\delta t} \cdot \cos \omega_e t \qquad (8)$$

Schauen wir uns zunächst nur den schwingenden Anteil an, so finden wir die konstante Eigenfrequenz* ω_e des Schwingers.

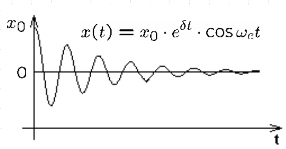
$$\omega_e = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} \qquad (8)$$

**Streng genommen ist ω_e nicht die Frequenz, sondern die Kreisfrequenz, wobei der Zusammenhang zur Frequenz f durch $\omega_e = 2\pi f_e$ gegeben ist.*

Freie, gedämpfte Schwingung

Die Reibung steckt in der *e*-Funktion, so dass sich folgendes Bild ergibt:

$$\delta = \frac{k}{2m} \quad \text{und} \quad \omega_e = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} \qquad (8)$$

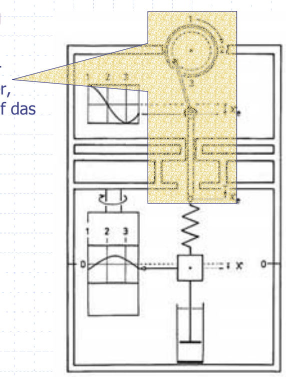


- Eine (Co-)Sinusschwingung einbeschrieben zwischen zwei abklingende *e*-Funktionen als Einhüllende

Für k = 0 ergibt sich Bewegungsgleichung für die freie, ungedämpfte Schwingung.

Erzwungene Schwingung

Wir verbinden die Feder der Apparatur mit einem Erreger, dessen Kraft sinusförmig auf das System einwirkt.



Erzwungene Schwingung – Exakte Lösung

- Die exakte Lösung der Bewegungsgleichung liefert für die Auslenkung:

$$x_0(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + k^2\omega^2}}$$

- Die Geschwindigkeit ergibt sich zu:

$$v(\omega) = \omega \cdot x_0(\omega)$$

- Und die von der Reibung „verbrauchte" (mittlere) Energie ist:

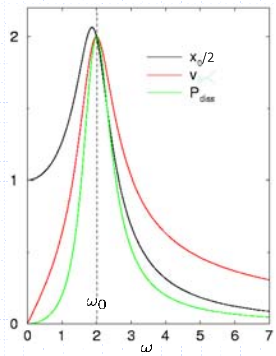
$$P_{diss}(\omega) = \frac{1}{2}k^2\omega^2 \cdot x_0^2(\omega)$$

Erzwungene Schwingung – Allgemeine Prinzipien

- Obwohl das Federpendel eine spezielle physikalische Situation darstellt, lassen sich die ***allgemeinen Eigenschaften*** schwingungsfähiger Systeme abstrahieren und auf andere Systeme übertragen:
- Fünf wichtige Eigenschaften schwingungsfähiger Systeme:
  - Charakteristische Variable(n) (zur Formulierung der Bewegungsgleichungen)
  - Trägheit (dient zur Speicherung kinetischer Energie)
  - Steifigkeit (dient zur Speicherung potentieller Energie)
  - Dämpfung (dient als Energieverbraucher)
  - Eigenfrequenz(en) und Eigenformen
- Die charakteristische erzwungene Schwingung benötigt noch eine sinusförmig mit irgendeiner Frequenz ω pulsierende Kraft, die auf das System einwirkt.

Resonanz – Eigenschaften

- Resonanz bedeutet ***nicht***, dass bei der Eigenfrequenz ω_0 die Amplitude maximal wird!
- Resonanz bedeutet vielmehr, dass das System bei der Eigenfrequenz ω_0 ***maximal Energie absorbiert!***



Erzwungene Schwingung – Verwandte Systeme

Federpendel vs. Elektrischer Schwingkreis:

- Variable: Auslenkung x ↔ Ladung Q
- Trägheit: Masse m ↔ Induktivität L
- Steifigkeit: Federkonstante D ↔ Inverse Kapazität 1/C
- Dämpfung: Reibung k ↔ Ohmscher Widerstand R
- Eigenfrequenz: $\omega_c^{mech} = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} \leftrightarrow \omega_c^{el} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$